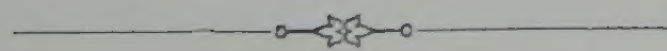
Sur un problème
relatif au mouvement des corpuscules électriques dans l'espace cosmique.

Par

Carl Størmer.

(Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-Naturvid. Klasse. 1907. No. 4.)



Christiania.
En commission chez Jacob Dybwad.
Imprimerie de A. W. Brøgger.
1907.

Fremlagt i Fællesmødet 7 December 1906.

Sur un problème relatif au mouvement des corpuscules électriques dans l'espace cosmique.

Par

Carl Størmer.

---

1. Dans quelques notes insérées dans les Comptes Rendus (voir t. CXLII p. 1580 et t. CXLIII p. 140, 408 et 460) et aussi dans une note qui vient d'être publiée dans l'«*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab t. XXVIII*», j'ai donné un résumé d'une série de recherches relatives aux trajectoires des corpuscules électriques dans l'espace sous l'influence du magnétisme terrestre, avec application aux aurores boréales et aux perturbations magnétiques.

Dans ces recherches, j'ai supposé entre autres hypothèses que la gravitation et la force répulsive de la lumière n'avaient pas d'influence appréciable sur le mouvement des corpuscules, et que le soleil n'est pas entouré d'un champ magnétique.

Si l'on ne fait pas ces hypothèses, le problème à résoudre devient plus difficile; on est amené à trouver d'abord les trajectoires des corpuscules au voisinage du soleil et ensuite au voisinage de la terre; on est alors conduit à un problème important à savoir celui-ci:

Trouver quel est le mouvement d'un corpuscule électrique sous l'action des forces suivantes:

1) l'action d'un champ magnétique donné;

2) l'attraction vers un centre fixe;

3) la force répulsive de la lumière émanant de ce même centre. Si l'on suppose que le soleil est chargé d'électricité, on aura encore à tenir compte

4) de l'attraction ou de la répulsion électrique vers ce même centre fixe.

Il est facile d'écrire les équations de mouvement du corpuscule dans ce cas; en effet les trois dernières forces sont inversement proportionnelles

au carré de la distance[1] et la première suit le loi de Biot-Savart. Si l'on place un système de coordonnées cartésiennes avec son origine au point fixe, on trouve alors

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda\left[Z\frac{dy}{dt} - Y\frac{dz}{dt}\right] + \mu\,\frac{x}{r^3}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda\left[X\frac{dz}{dt} - Z\frac{dx}{dt}\right] + \mu\,\frac{y}{r^3}\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \lambda\left[Y\frac{dx}{dt} - X\frac{dy}{dt}\right] + \mu\,\frac{z}{r^3}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

où λ et μ sont des constantes dépendant de la nature du corpuscule, de sa charge et de l'intensité des forces agissantes.

On en tire d'abord

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

d'où

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\frac{2\mu}{r} + C$$

où C est une constante d'intégration.

Donc, si v désigne la vitesse, on a

$$v = \sqrt{C - \frac{2\mu}{r}}$$

Comme $v = \frac{ds}{dt}$, cela donne

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{C - \frac{2\mu}{r}} \qquad \text{(II)}$$

2. Cela posé, *supposons que le champ magnétique dérive d'un potentiel newtonien V et que ce potentiel est fonction de R et de z seuls* ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$). Introduisons des coordonnées semipolaires R et φ définies par les équations

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi;$$

cela donne:

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(R^2\,\frac{d\varphi}{dt}\right) \qquad (2)$$

[1] Si les corpuscules sont affectés par la force répulsive de la lumière, il faut supposer que leur vitesse est petite relativement à la vitesse de la lumière. Dans le cas contraire, l'action n'est pas si simple.

Or, par les équations (I) on trouve:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda . \left[(xX + yY)\frac{dz}{dt} - Z\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)\right] \tag{3}$$

Mais on a

$$xX + yY = x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = x\frac{\partial V}{\partial R}\cdot\frac{x}{R} + y\frac{\partial V}{\partial R}\cdot\frac{y}{R} = R\frac{\partial V}{\partial R}$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

et

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = R\frac{dR}{dt}$$

Donc

$$(xX + yY)\frac{dz}{dt} - Z\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = R\frac{\partial V}{\partial R}\cdot\frac{dz}{dt} - R\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dR}{dt} \tag{4}$$

En substituant cela dans l'équation (3) et en tenant compte de l'équation (2), il viendra donc:

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \lambda\left(R\frac{\partial V}{\partial R}\frac{dz}{dt} - R\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dR}{dt}\right) \tag{5}$$

Or, nous allons voir que l'on peut trouver une fonction Φ de R et de z telle que

$$\left.\begin{aligned} \lambda R\frac{\partial V}{\partial R} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \text{et} \qquad -\lambda R\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

En effet, pour cela il faut et il suffit que

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial V}{\partial R}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-R\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

En développant cette condition, on aura

$$R\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial V}{\partial R} + R\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Mais, comme V est un potentiel newtonien, cette condition sera remplie; en effet, l'équation ci-dessus n'est que la transformée de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

en y supposant V fonction de R et de z seuls, ce qu'on vérifie sans difficulté.

Donc, en introduisant cette fonction Φ dans l'équation (5) il viendra

$$\frac{d}{dt}\left(R^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d\Phi}{dt}$$

ce qui peut être intégré immédiatement et donne:

$$R^2 \frac{d\varphi}{dt} = \Phi + a \tag{III}$$

a étant une constante d'intégration.

En combinant les équations (II) et (III), on déduit la relation suivante:

$$R\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\Phi + a}{R \cdot \sqrt{C - \frac{2\mu}{r}}} \tag{IV}$$

Comme dans ma note dans l'«*Archiv* etc.», cette équation (IV) est susceptible d'une interprétation géométrique importante.

En effet, si l'on désigne par θ l'angle que fait la tangente de la trajectoire avec le plan passant par l'axe des z et le point considéré, on a $R\frac{d\varphi}{ds} = \sin\theta$; donc

$$\sin\theta = \frac{\Phi + a}{R \cdot \sqrt{C - \frac{2\mu}{r}}} \tag{IV'}$$

Comme $\sin\theta$ est compris entre -1 et $+1$, les inégalités

$$-1 \lesseqgtr \frac{\Phi + a}{R \cdot \sqrt{C - \frac{2\mu}{r}}} \lesseqgtr 1 \tag{V}$$

définissent les *parties de l'espace dont la trajectoire ne peut sortir.*

3. Considérons le cas particulier où le champ magnétique est dû *à un aimant élémentaire* de moment M placé à l'origine avec son axe le long de l'axe des z et le pôle sud vers les z positifs. Alors

$$V = M\frac{z}{r^3} \tag{7}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{3MRz}{r^5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{M(3z^2 - r^2)}{r^5}$$

La fonction Φ sera alors définie par les équations:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3 \lambda M \frac{R^2 z}{r^5}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \lambda M . \frac{R(3z^2 - r^2)}{r^5},$$

ce qui donne

$$\Phi = \lambda M \frac{R^2}{r^3} \tag{8}$$

Donc les parties de l'espace d'où la trajectoire ne peut sortir seront définies par les inégalités:

$$-1 \lesseqgtr \frac{ar^3 + \lambda M R^2}{Rr^2 . \sqrt{Cr^2 - 2\mu r}} \lesseqgtr 1 \tag{VI}$$

La forme de ces espaces dépend, comme on le voit, de M, λ et μ et des constantes d'intégration a et C.

L'étude approfondie de ces espaces et de leurs diverses formes sera du plus haut intérêt pour les applications physiques.

4. Considérons un corpuscule lancé dans le plan $z = 0$, en supposant le champ magnétique dû à un aimant élémentaire, comme dans le paragraphe précédent.

La force magnétique étant normale à ce plan et les autres forces y étant situées, le corpuscule se mouvra toujours dans ce plan.

On aura donc comme solution particulière du problême général le cas du mouvement dans le plan $z = 0$. Il est facile dans ce cas d'intégrer les équations différentielles par des quadratures.

En effet, comme alors

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 1 - \left(R \frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

on aura

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = \frac{CR^4 - 2\mu R^3 - (aR + \lambda M)^2}{CR^4 - 2\mu R^3} \tag{9}$$

équation qui peut être intégrée par des fonctions elliptiques. Cela fait, les équations

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{aR + \lambda M}{R^2 . \sqrt{CR^2 - 2\mu R}} \tag{10}$$

et

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{CR - 2\mu}} \tag{11}$$

donnent φ et t par deux quadratures.

5. Parmi les trajectoires remarquables, signalons *des cercles avec centre sur l'axe des z et situés dans des plans parallèles au plan des xy.*

J'ai été conduit à ces trajectoires par l'étude des espaces définis par l'équation (VI); en effet, parmi ces espaces il y en a une infinité qui ont la forme *d'anneaux fermés* et qui se réduisent dans les cas limites aux cercles d'espèce mentionnée.

On reconnait immédiatement l'existence de pareilles trajectoires en posant

$$\left.\begin{aligned} x &= r_0 \cos\psi_0 \cos\left(\frac{vt}{r_0\cos\psi_0}\right) \\ y &= r_0 \cos\psi_0 \sin\left(\frac{vt}{r_0\cos\psi_0}\right) \\ z &= r_0 \sin\psi_0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et en cherchant à déterminer les constantes r_0, ψ_0 et v de manière à satisfaire au système (I), qui, pour le cas où le champ magnétique est dû à un aimant élémentaire, est de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda M\left(\frac{3yz}{r^5}\frac{dz}{dt} - \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\frac{dy}{dt}\right) + \mu\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda M\left(\frac{3z^2 - r^2}{r^5}\frac{dx}{dt} - \frac{3xz}{r^5}\frac{dz}{dt}\right) + \mu\frac{y}{r^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \lambda M\left(\frac{3xz}{r^5}\frac{dy}{dt} - \frac{3yz}{r^5}\frac{dx}{dt}\right) + \mu\frac{z}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Dans le cas actuel, z est constant, donc $\frac{dz}{dt} = 0$ et $\frac{dz^2}{dt^2} = 0$. Le système peut donc s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} r^5 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= -\lambda M(3z^2 - r^2)\frac{dy}{dt} + \mu x r^2 \\ r^5 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda M(3z^2 - r^2)\frac{dx}{dt} + \mu y r^2 \\ 0 &= z \cdot \left[3\lambda M x\frac{dy}{dt} - 3\lambda M y\frac{dx}{dt} + \mu r^2\right] \end{aligned}\right\}$$

En substituant ici les valeurs de x, y et z, on trouve, en posant pour abréger $\frac{vt}{r_0\cos\psi_0} = u$:

$$-\frac{v^2 r_0^4}{\cos\psi_0} \cdot \cos u = -\lambda M v r_0^2 (3\sin^2\psi_0 - 1)\cos u + \mu r_0^3 \cos\psi_0 \cdot \cos u$$

$$-\frac{v^2 r_0^4}{\cos\psi_0} \cdot \sin u = -\lambda M v r_0^2 (3\sin^2\psi_0 - 1)\sin u + \mu r_0^3 \cos\psi_0 \cdot \sin u$$

$$0 = r_0 \sin\psi_0 \left\{3\lambda M v r_0 \cos\psi_0 (\cos^2 u + \sin^2 u) + \mu r_0^2\right\}$$

équations qui sont satisfaites identiquement, si

$$\left.\begin{aligned}&\frac{v^2 r_o^2}{\cos\psi_o} + \mu r_o \cos\psi_o - \lambda M v\,(3\sin^2\psi_o - 1) = 0\\ \text{et}\quad &\sin\psi_o\,(3\,\lambda M v\cos\psi_o + \mu r_o) = 0\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

On aura deux cas à considérer, suivant que l'on choisit $\sin\psi_o = 0$ ou non.

1er cas: $\sin\psi_o = 0$, $\supset$: $\psi_o = 0$

On aura alors

$$v^2 r_o^2 + \mu r_o + \lambda M v = 0$$

d'où

$$r_o = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\,\lambda M v^3}}{2\,v^2}$$

Par sa définition, r_o est toujours positif. Donc, si μ est positif, il faut choisir le signe $+$ devant le radical, ce qui donne:

$$r_o = \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\,\lambda M v^3} - \mu}{2\,v^2}$$

et de plus, il faut que λv soit négatif.

Si μ est négatif, $\mu = -\mu_1$ il viendra

$$r_o = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 4\,\lambda M v^3}}{2\,v^2}$$

Donc, si λv est positif, on aura deux solutions

$$r_o = \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\,\lambda M v^3}}{2\,v^2} \quad \text{et} \quad r_o = \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - 4\,\lambda M v^3}}{2\,v^2}$$

pourvu que

$$4\,\lambda M v^3 < \mu_1^2\,;$$

les solutions se confondront en une seule, à savoir

$$r_o = \frac{\mu_1}{2\,v^2}$$

si $4\,\lambda M v^3 = \mu_1^2$ et n'existent plus, si $4\,\lambda M v^3 > \mu_1^2$.

Si λv est négatif, on n'aura qu'une seule solution, à savoir

$$r_o = \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 - 4\,\lambda M v^3}}{2\,v^2}$$

Tous ces cercles sont situés dans le plan des xy.

2me *cas*: $3\lambda Mv \cos\psi_0 + \mu r_0 = 0$.

En substituant la valeur de r_0, tirée de cette équation, dans la première des équations (13), on obtient:

$$\frac{v^2}{\mu^2} \cdot 9\lambda^2 M^2 v^2 \cdot \cos\psi_0 - 3\lambda Mv \cos^2\psi_0 - \lambda Mv(3\sin^2\psi_0 - 1) = 0$$

qui se réduit à

$$\frac{9v^4\lambda^2M^2}{\mu^2}\cos\psi_0 - 2\lambda Mv = 0$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi_0 &= \frac{2\mu^2}{9\lambda Mv^3} \\ r_0 &= -\frac{2\mu}{3v^2} \end{aligned}\right\}$$

r_0 doit être positif; donc μ sera négatif, $\mu = -\mu_1$, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \frac{2\mu_1}{3v^2} \\ \cos\psi_0 &= \frac{2\mu_1^2}{9\lambda Mv^3} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Comme $\cos\psi_0$ sera > 0 et $\leqq 1$ il faut ensuite que λv soit positif et que

$$0 < 2\mu_1^2 \leqq 9\lambda Mv^3$$

Dans ces conditions, on aura donc des trajectoires qui sont des cercles situés dans des plans parallèles au plan des xy et dont les centres sont situés sur l'axe des z, c. q. f. d.

Dans un mémoire subséquent, nous allons étudier en détail les espaces dont les trajectoires ne peuvent sortir, et en tirer des conséquences, p. ex. pour la théorie d'Arrhenius, d'après laquelle les corpuscules sont émanés du soleil par *la force répulsive de la lumière.*

Imprimé le 15 mai 1907.